GỢI Ý BÀI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC 2010
MÔN TOÁN – KHỐI A

I – PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I: $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$

1) Khi m =1, $y = x^3 - 2x^2 + 1$

$D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{4}{3} \rightarrow y = \dfrac{-5}{27} \end{array}\right.$$

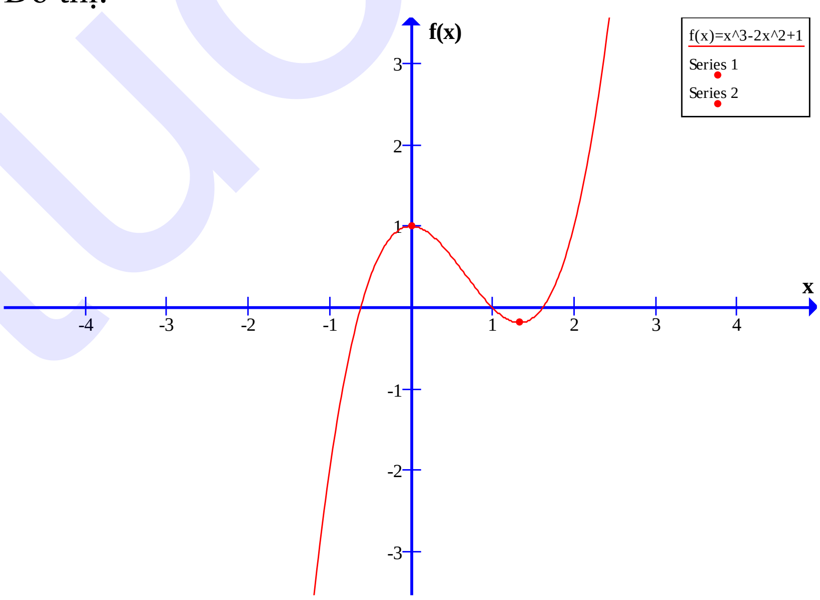
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$. Điểm cực đại (0; 1), điểm cực tiểu $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{-5}{27}\right)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{-5}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và Ox

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \;\; (2) \\ g(x) = x^2 - x - m = 0 \;\; (3) \end{array}\right.$$

Gọi x_1 là nghiệm pt (2) và x_2, x_3 là nghiệm pt (3).

Yêu cầu bài toán : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 1 + 2m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{4} < m \neq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu II

1) $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x)(\sin x + \cos x)}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x + \cos 2x)(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \;\; \text{(loại)} \\ \sin x = \dfrac{-1}{2} \;\; \text{(thỏa đk)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z).$$

2) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$

Ta có: $2(x^2-x+1)=2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right] \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}<0$

bpt $\Leftrightarrow x-\sqrt{x} \leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} \leq \sqrt{x}+(1-x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\left[(1-x)^2+(\sqrt{x})^2\right]} \leq \sqrt{x}+(1-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+(1-x) \geq 0 \\ \left((1-x)-\sqrt{x}\right)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1-x \geq 0 \\ 1-x=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

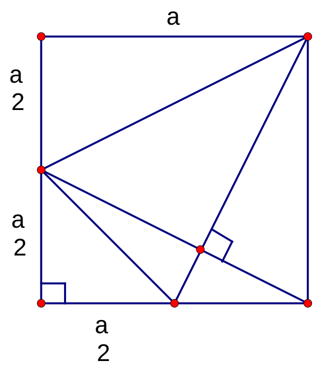
Câu III

$$I=\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{e^x}{1+2e^x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

Vậy $I=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+2e}{3}\right)$

Câu IV



+ Ta có: SH ⊥ (ABCD) → $V_{S.CMND}=\dfrac{1}{3}SH.S_{CMND}$

$S_{CMND}=S_{ABCD}-S_{CBM}-S_{AMD}=a^2-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{8}=\dfrac{5a^2}{8}$

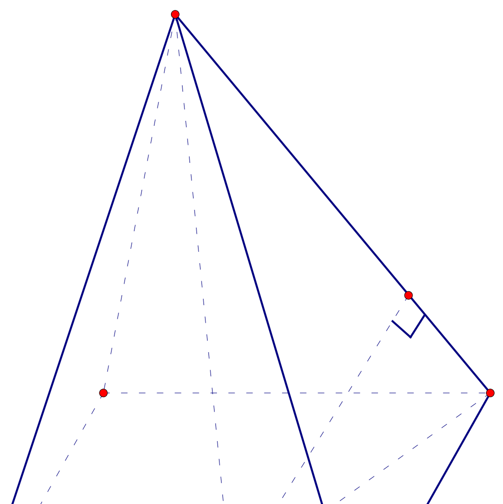
$\Rightarrow V_{S.CMND}=\dfrac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{5a^2}{8}=\dfrac{a^3 5\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)

+ Ta có : ΔCDN = ΔDAM

$\Rightarrow \begin{cases} CN \perp DM \\ SH \perp DM \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SCN) \Rightarrow DM \perp SC$

Kẻ HK ⊥ SC → HK ⊥ MD → HK = d(DM, SC)

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HC^2}$



với $\begin{cases} SH = a\sqrt{3} \\ CN.CH = CD^2 \end{cases} \to CH^2 = \dfrac{CD^4}{CN^2} = \dfrac{a^4}{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{4a^2}{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Câu V

<u>Cách 1:</u>

$$\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x + \left(y-3\right)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4x^2+1\right)x = \left(3-y\right)\sqrt{5-2y} \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2) \end{cases}$$

+ Điều kiện: $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{4} \\ y \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} VT_{(1)} = 4x^3 + x \le \dfrac{39}{16} \Rightarrow VP_{(1)} = \left(3-y\right)\sqrt{5-2y} \le \dfrac{39}{16} \Rightarrow y \ge 0 \\ VP_{(1)} \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{3}{4} \\ 0 \le y \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

+ Xét $f_1(x) = \left(4x^2+1\right)x$ tăng trên $\left[0\ ;\ \dfrac{3}{4}\right]$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

$g_1(y) = \left(3-y\right)\sqrt{5-2y}$ giảm trên $\left[0\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$, $g\left(2\right) = 1$

+ $f_2(x) = 4x^2 + 2\sqrt{3-4x}$ giảm trên $\left[0\ ;\ \dfrac{3}{4}\right]$

$g_2(y) = y^2$ tăng trên $\left[0\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$

+ Với $0 \le x < \dfrac{1}{2}$: $(1) \Rightarrow g_1(y) = f_1(x) < f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = g_1\left(2\right) \Rightarrow y > 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_2(x) > f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \\ g_2(y) > g_2(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow VT_{(2)} > VP_{(2)}$$

+ Với $\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{3}{4}$: $(1) \Rightarrow g_1(y) = f_1(x) > f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = g_1(2) \to y < 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_2(x) < f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \\ g_2(y) < g(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow VT_{(2)} < VP_{(2)}$$

+ Với $x = \dfrac{1}{2}$, hpt $\Rightarrow y = 2$.

Vậy nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Cách 2:

$$\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x + \left(y-3\right)\sqrt{5-2y} = 0 \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \left(4x^2+1\right)x = \left(3-y\right)\sqrt{5-2y} \ge 0,\ \forall y \le \dfrac{5}{2} \to x \ge 0$

Đặt $\begin{cases} u = 2x\ ;\ 0 \le u \le \dfrac{3}{2} \\ v = \sqrt{5-2y} \ge 0 \Rightarrow y = \dfrac{5-v^2}{2} \end{cases}$

Thay vào (1) ta có: $\left(u^2+1\right).\dfrac{u}{2} + \left(\dfrac{5-v^2}{2} - 3\right).v = 0$

$\Leftrightarrow u^3 + u - v^3 - v = 0 \Leftrightarrow u^3 + u = v^3 + v$ (*

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ tăng trên R.

$(*) \Rightarrow u = v$.

Từ (2) ta có: $u^2 + \left(\dfrac{5-u}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-2u} = 7 \Leftrightarrow 8\sqrt{3-2u} = -u^4 + 6u^2 + 3$ (3)

Đặt $f(u) = -u^4 + 6u^2 + 3\ ;\ 0 \le u \le \dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

u	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(u)		+	0	–	0	+	0	–	
f(u)		↗		↘		↗		↘	

Nhận xét : u = 1 là nghiệm của (3).

+ $g(u)=8\sqrt{3-2u}$ hàm giảm trên $0\le u\le\frac{3}{2}$

+ $f(u)=-u^4+6u^2+3$ hàm tăng trên $0\le u\le\frac{3}{2}$.

➔ (3) có nghiệm duy nhất u = 1 → $x=\frac{1}{2}\to y=2$

II – PHẦN RIÊNG

A. THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu VIa

1) $(d_1):\sqrt{3}x+y=0$**;** $(d_2):\sqrt{3}x-y=0$**.**

+ $d_1\cap d_2=0(0;0)$

+ $\cos(d_1;d_2)=\frac{\left|\sqrt{3}.\sqrt{3}-1\right|}{2.2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOC}=60^0$ (ΔAOC vuông tại A).

$\Rightarrow AC=2R$; $AB=R$; $BC=R\sqrt{3}$; $OA=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Theo gt: $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{AB.BC}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\ =R\ \Rightarrow\ =OA\ \ \frac{2}{\sqrt{3}}$

Mà $A\in(d_1)\Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right)\Rightarrow OA^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow a^2+3a^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 4a^2=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (a > 0).

+ $(d_3):\begin{cases}\text{qua } A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)\\(d_3)\perp(d_1)\end{cases}\Rightarrow(d_3):x-\sqrt{3}y-\frac{4}{\sqrt{3}}=0$.

+ $T\left(t;\frac{\sqrt{3}t-4}{3}\right)\in d_3$

$+\ OT^2 = OA^2 + AT^2 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}t - 4}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 8\sqrt{3}t - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow I\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}; \frac{-1}{2}\right) \text{ loại vì } d\left(I, d_2\right) > 1 \\ t_2 = \frac{-\sqrt{3}}{6} \Rightarrow I\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}; \frac{-3}{2}\right) \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $(T): \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

2) $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$; $(P): x - 2y + z = 0$

Phương trình tham số: $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - t \end{cases}$

+ Vì $C = \Delta \cap (P)$. Tọa độ điểm C thỏa hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow C(-1;-1;-1)$$

+ $M(1+2t; t; -2-t) \in \Delta$, $MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+1)^2 + (-t-1)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow 6t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \to M_1(1;0;-2) \\ t = -2 \to M_2(-3;-2;0) \end{array}\right.$$

+ $d(M_1,(P)) = \frac{|1-0-2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = d(M_2,(P))$. Vậy $d(M,(P)) = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu VIIa

Tìm phần thực, ảo của z:

$\bar{z} = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 \left(1 - \sqrt{2}i\right)$

$= \left(2 + 2\sqrt{2}i + i^2\right)\left(1 - \sqrt{2}i\right)$

$= \left(1 + 2\sqrt{2}i\right)\left(1 - \sqrt{2}i\right)$

$= 1 - \sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i - 4i^2 = 5 + \sqrt{2}i$

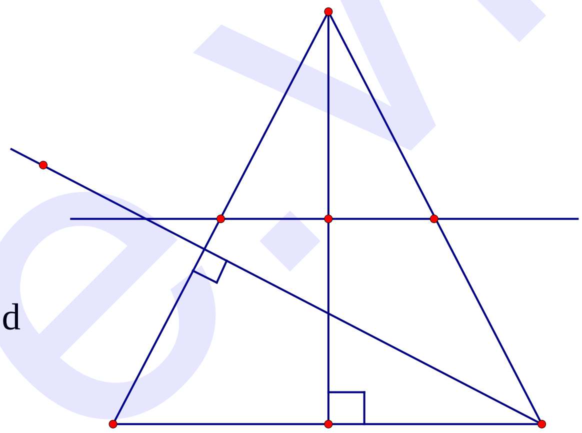
$\Rightarrow z = 5 - \sqrt{2}i$

Phần thực của z là a = 5; phần ảo của z là $b = -\sqrt{2}$.

B. THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu VIb

1) Đặt $d: x + y - 4 = 0$



+ $A \in \Delta \perp d \Rightarrow \Delta: x - y = 0$

+ Gọi $H = \Delta \cap d \Rightarrow H(2;2)$

+ Gọi I là trung điểm BC

suy ra H là trung điểm IA → I(-2; -2)

+ Đường thẳng (BC) qua I và song song d

→ (BC): x + y + 4 = 0.

+ $B, C \in BC \Rightarrow \begin{cases} B(b;-b-4) \\ C(c;-c-4) \end{cases}$

+ $\overrightarrow{AB} = (b-6;-b-10)$; $\overrightarrow{EC} = (c-1;-c-1)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = 0 \\ \text{I là trung điểm BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-6)(c-1) + (b+1)(c+1) = 0 \\ b + c = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} bc + 2c + 8 = 0 \\ b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} c = -4 \\ b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow B(-6;2); C(2;-6)$ hay $B(0;-4); C(-4;0)$.

2) $A(0;0;-2)$, $\Delta: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$

+ (d) qua M(-2;2;-3), vtcp: $\vec{a} = (2;3;2)$

+ $\overrightarrow{MA} = (2;-2;1)$

+ $\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right] = (7;2;-10) \Rightarrow \left|\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right]\right| = \sqrt{49 + 4 + 100} = \sqrt{153}$

+ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$

$$d(A,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}=3.$$

Mà $R^2=d^2(A,\Delta)+\dfrac{BC^2}{4}=9+16=25$

Suy ra mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=25$

Câu VIIb

Ta có

$$\bar{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=-4-4i\Rightarrow z=-4+4i$$

$$\left|\bar{z}+iz\right|=\left|-8-8i\right|=8\sqrt{2}$$

(GV. Trần Nhân – Trường THPT Tân Bình)

NHẬN XÉT ĐỀ THI

(GV. Võ Hữu Phước – Trường THPT Trần Hưng Đạo)

Đề thi toán khối A năm nay có nội dung nằm trong chương trình cơ bản THPT. Tuy nhiên, đề thi đòi hỏi học sinh cần phải sáng tạo và linh hoạt. Nhìn chung, đề có mức độ phân loại học sinh rất cao và rõ rệt: Chẳng hạn, phần khảo sát hàm số, phương trình lượng giác, tích phân, tọa độ trong không gian và số phức thì học sinh chỉ cần vận dụng kiến thức cơ bản là có thể giải được. Các phần còn lại (đặc biệt câu giải hệ phương trình tương đối khó), học sinh cần phải có tư duy, sáng tạo và cẩn thận mới giải tốt được. Nên với đề thi toán khối A năm nay, học sinh khó có thể đạt được điểm tối đa.