



ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009
Môn thi: Toán (khối D)
(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I (2,0 điểm).

Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu III (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$

Câu IV (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Câu V (1,0 điểm). Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC .
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2; 1; 0)$, $B(1; 2; 2)$, $C(1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) .

Câu VII.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

Câu VII.b (1,0 điểm)

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

BÀI GIẢI GỢI Ý

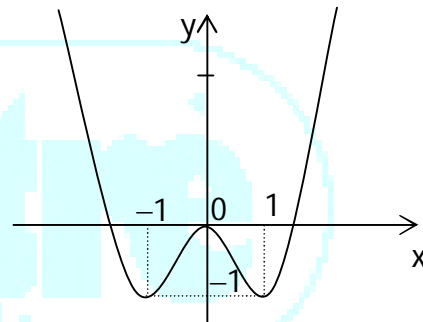
Câu I. 1. $m = 0, y = x^4 - 2x^2$. TXĐ : $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

\swarrow CT \nearrow CT
 CT CT

y đồng biến trên $(-1; 0); (1; +\infty)$
 y nghịch biến trên $(-\infty; -1); (0; 1)$
 y đạt cực đại bằng 0 tại $x = 0$
 y đạt cực tiểu bằng -1 tại $x = \pm 1$
 Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 0)$



Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(0; 0); (\pm\sqrt{2}; 0)$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1$ là

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ hay } x^2 = 3m + 1 \quad (*)$$

Đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và < 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu II. 1) Phương trình tương đương :

$$\sqrt{3} \cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \text{ hay } \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{3} - k2\pi \text{ hay } 4x = \frac{\pi}{3} - \pi - k2\pi = -\frac{2\pi}{3} - k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} - k\frac{\pi}{3} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Hệ phương trình tương đương :

$$\begin{cases} x(x+y+1) = 3 \\ (x+y)^2 + 1 = \frac{5}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y) + x = 3 \\ x^2(x+y)^2 + x^2 = 5 \end{cases} \quad \text{ĐK : } x \neq 0$$

Đặt $t = x(x+y)$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} t+x=3 \\ t^2+x^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+x=3 \\ (t+x)^2 - 2tx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+x=3 \\ tx=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} t=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x(x+y)=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x(x+y)=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Câu III : $I = \int_1^3 \frac{1-e^x+e^x}{e^x-1} dx = -\int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{e^x}{e^x-1} dx = -2 + \ln|e^x-1| \Big|_1^3$
 $= -2 + \ln(e^3-1) - \ln(e-1) = -2 + \ln(e^2+e+1)$

Câu IV.

$$AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$$

$$BC^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$$

H là hình chiếu của I xuống mặt ABC

Ta có $IH \perp AC$

$$\frac{IA'}{IC} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{4a}{3}$$

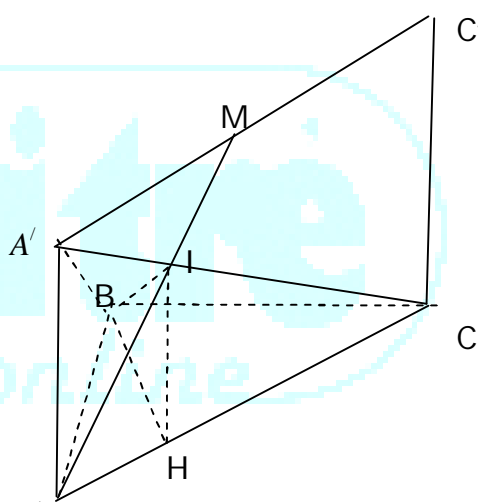
$$V_{IABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} IH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \times a \times \frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9} \quad (\text{đvtt})$$

Tam giác $A'BC$ vuông tại B

$$\text{Nên } S_{A'BC} = \frac{1}{2} a\sqrt{5} \cdot 2a = a^2\sqrt{5}$$

$$\text{Xét 2 tam giác } A'BC \text{ và } IBC, \text{ thấy } IC = \frac{2}{3} A'C \Rightarrow S_{IBC} = \frac{2}{3} S_{A'BC} = \frac{2}{3} a^2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } d(A, IBC) = \frac{3V_{IABC}}{S_{IBC}} = 3 \frac{4a^3}{9} \frac{3}{2a^2\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



Câu V. $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$
 $= 16x^2y^2 + 12[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] + 34xy = 16x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy$
 $= 16x^2y^2 - 2xy + 12$

Đặt $t = x.y$, vì $x, y \geq 0$ và $x + y = 1$ nên $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$

$$\text{Khi đó } S = 16t^2 - 2t + 12$$

$$S' = 32t - 2; S' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$$

$$S(0) = 12; S(\frac{1}{4}) = \frac{25}{2}; S(\frac{1}{16}) = \frac{191}{16}. \text{ Vì } S \text{ liên tục } [0; \frac{1}{4}] \text{ nên :}$$

$$\text{Max } S = \frac{25}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Min } S = \frac{191}{16} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

PHẦN RIÊNG

Câu VI.a.

1) Gọi đường cao AH : $6x - y - 4 = 0$ và đường trung tuyến AD : $7x - 2y - 3 = 0$

$$A = AH \cap AD \Rightarrow A(1; 2)$$

$$M \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow B(3; -2)$$

$$BC \text{ qua } B \text{ và vuông góc với } AH \Rightarrow BC : 1(x - 3) + 6(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y + 9 = 0$$

$$D = BC \cap AD \Rightarrow D\left(0; -\frac{3}{2}\right)$$

$$D \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow C(-3; -1)$$

$$AC \text{ qua } A(1; 2) \text{ có VTCP } \overrightarrow{AC} = (-4; -3)$$

$$\text{nên } AC : 3(x - 1) - 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0$$

2) AB qua A có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$ nên có phương trình :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

$$D \in AB \Leftrightarrow D(2 - t; 1 + t; 2t)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1 - t; t; 2t). \text{ Vì } C \notin (P) \text{ nên : } CD // (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \perp \vec{n}_{(P)}$$

$$\Leftrightarrow 1(1 - t) + 1 \cdot t + 1 \cdot 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ Vậy } D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$$

Câu VI.b. 1. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Tâm I(1; 0); R = 1

$$\text{Ta có } \widehat{IMO} = 30^\circ, \Delta OIM \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{MOI} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow OM \text{ có hệ số góc } k = \pm \text{tg}30^\circ = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+ k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{pt } OM : y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ thế vào pt (C)} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{x^2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại) hay } x = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } M\left(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Cách khác:

Ta có thể giải bằng hình học phẳng

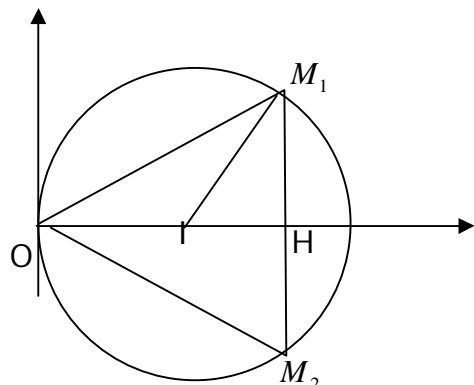
OI = 1, $\widehat{IOM} = \widehat{IMO} = 30^\circ$, do đó xấp xỉ ta sẽ có

2 điểm nằm trên quỹ đạo với Ox

H là hình chiếu của M xuống Ox.

Tam giác OM_1H là tam giác đều

$$OI = 1 \Rightarrow OH = \frac{3}{2} \Rightarrow OM = \frac{3}{\sqrt{3}}, HM = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$$



Vậy $M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Gọi $A = \Delta \cap (P) \Rightarrow A(-3; 1; 1)$

$$\vec{a}_\Delta = (1; 1; -1); \vec{n}_{(P)} = (1; 2; -3)$$

d đi qua A và có VTCP $\vec{a}_d = [\vec{a}_\Delta, \vec{n}_{(P)}] = (-1; 2; 1)$ nên pt d là :

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Câu VII.a. Gọi $z = x + yi$. Ta có $z - (3 - 4i) = x - 3 + (y + 4)i$

$$\text{Vậy } |z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Do đó tập hợp biểu diễn các số phức z trong mp Oxy là đường tròn tâm I (3; -4) và bán kính R = 2.

Câu VII.b. pt hoành độ giao điểm là : $\frac{x^2 + x - 1}{x} = -2x + m \quad (1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = x(-2x + m) \text{ (vì } x = 0 \text{ không là nghiệm của (1))}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

phương trình này có $a.c < 0$ với mọi m nên có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$$\text{Ycbt } \Leftrightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Người giải đề: PHẠM HỒNG DANH - TRẦN VĂN TOÀN
(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn, TP.HCM)

online